

# Homework #6

PHIL-205-01:Symbolic Logic

Blizzard MacDougall

11/03/2021

Prove the following theorems:

1.  $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$  (Contrapositive)

1. $P \rightarrow Q$	
2. $\neg Q$	
3. $\neg P$	
4. $\neg Q \rightarrow \neg P$	<b>MT:</b> 1, 2
5. $\neg Q \rightarrow \neg P$	<b><math>\rightarrow</math> Intro:</b> 2-3
6. $P$	
7. $Q$	
8. $P \rightarrow Q$	<b>MT:</b> 5, 6
9. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	<b><math>\rightarrow</math> Intro:</b> 6-7
	<b><math>\leftrightarrow</math> Intro:</b> 1-4, 5-8

2.  $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$

1. $P \wedge \neg Q$	
2. $P \leftrightarrow Q$	
3. $P$	
4. $Q$	<b><math>\leftrightarrow</math> Elim:</b> 2, 3
5. $\neg Q$	<b><math>\wedge</math> Elim:</b> 1, 3
6. $\perp$	<b><math>\perp</math> Intro:</b> 4, 5
7. $\neg P$	
8. $\neg Q$	<b><math>\leftrightarrow</math> Elim:</b> 2, 7
9. $P$	<b><math>\wedge</math> Elim:</b> 18
10. $\perp$	<b><math>\neg</math> Intro:</b> 7-9
11. $\perp$	<b>TND:</b> 3-6, 7-10
12. $\neg(P \leftrightarrow Q)$	<b><math>\neg</math> Intro:</b> 2-11
13. $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$	<b><math>\rightarrow</math> Intro:</b> 1-12

3.  $[P \vee (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$

1. $P \vee (Q \wedge R)$	
2. $\neg P$	
3. $Q \wedge R$	<b>DS:</b> 1, 2
4. $Q$	$\wedge$ <b>Elim:</b> 3
5. $R$	$\wedge$ <b>Elim:</b> 3
6. $P \vee Q$	$\vee$ <b>Intro:</b> 4
7. $P \vee R$	$\vee$ <b>Intro:</b> 5
8. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\wedge$ <b>Intro:</b> 6, 7
9. $P$	
10. $P \vee Q$	$\vee$ <b>Intro:</b> 9
11. $P \vee R$	$\vee$ <b>Intro:</b> 9
12. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\wedge$ <b>Intro:</b> 10–11
13. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	<b>TND:</b> 1–8, 9–12
14. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
15. $P \vee Q$	
16. $P \vee R$	
17. $\neg P$	
18. $Q$	<b>DS:</b> 15, 17
19. $R$	<b>DS:</b> 16, 17
20. $Q \wedge R$	$\wedge$ <b>Intro:</b> 18, 19
21. $P \vee (Q \wedge R)$	$\vee$ <b>Intro:</b> 20
22. $P$	
23. $P \vee (Q \wedge R)$	$\vee$ <b>Intro:</b> 22
24. $P \vee (Q \wedge R)$	<b>TND:</b> 17–21, 22–23
25. $[P \vee (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$	$\leftrightarrow$ <b>Intro:</b> 1–13, 14–24

4.  $[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)] \rightarrow (P \leftrightarrow R)$

1. $(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)$	
2. $P \leftrightarrow Q$	$\wedge$ <b>Elim:</b> 1
3. $Q \leftrightarrow R$	$\wedge$ <b>Elim:</b> 1
4. $P$	
5. $Q$	$\leftrightarrow$ <b>Elim:</b> 2, 4
6. $R$	$\leftrightarrow$ <b>Elim:</b> 3, 5
7. $R$	
8. $Q$	$\leftrightarrow$ <b>Elim:</b> 3, 7
9. $P$	$\leftrightarrow$ <b>Elim:</b> 2, 8
10. $P \leftrightarrow R$	$\leftrightarrow$ <b>Intro:</b> 4–6, 7–9
11. $[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)] \rightarrow (P \leftrightarrow R)$	$\rightarrow$ <b>Intro:</b> 1–10

$$5. \neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{|l}
 \hline
 1. P \rightarrow Q \\
 \hline
 \begin{array}{|l}
 2. \neg Q \\
 \hline
 3. \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} \\
 \hline
 x. P \wedge \neg Q \\
 \hline
 \begin{array}{|l}
 1. P \wedge \neg Q \\
 \hline
 \begin{array}{|l}
 1. P \\
 \hline
 2. \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} \\
 \hline
 x. P \rightarrow Q \\
 \hline
 z. \neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)
 \end{array}$$